# 研究回顧



中井, 喜和

代数幾何学シンポジウム記録
1980年度 pp.1-20



# 研究回顧

中井喜和（阪大理）

今回は私の還暦を記念して、代数幾何学のシンポジウムを開いて頂き、誠に有難く、このことを企画して頂いた、永田・宮西両氏をはじめ、参会して下さった諸兄に厚く御礼申し上げたいと存じます。

私の生れたのは大正9年（1920）でありますが、京大を卒業しましたのは昭和24年（1949）と比較的新しく、かなり晩学であったと申せましょう。その理由はいくつかあるのですが、その1つは、昭和17年9月より、昭和20年9月まで、丁度丸3年の海軍予備将校として軍務についていたからで、大学にはいりましたのは、終戦の翌年の昭和21年のことでありました。その頃のことを振り返ってみますと、うたた感慨に耐えません。食

料が乏しく、闇市が栄え、真正直に配給食料だけで暮していおられた裁判官が餓死されるという事件までおきた時代でありました。そんな時によく大学で数学を勉強する気になったものだと、我ながら感心いたしております。それはともかく、24年に卒業し、直ちに大学院にのこりまして、秋月先生の下で、代数幾何学を専攻するようになりました。始めは夢中で本や論文をよんでおりましたが、日が経つにつれ、自分のThemeを何にしたらよかろうかと、いろいろ模索したものでした。その頃の代数幾何学を専攻しようとする人が必ずよむものとして、いわゆるWeilの三部作があります。その中にSur les courbes algébriques et les variétés qui s'en deduisentがあります。その中でRiemann-Rochの定理を証明しているのですが、そこでの、「微分」あるいは「微分因子」の扱いは大変ユニークな方法で、私の興味が著るしく喚起されたものでした。それがその後の研究に1つの方向づけを与へたように思いま

す。たまたまその頃 Lefschetz の Analyse situs et la géometrie algébrique に接する機会がありました。有体にいえば、よむことを強制されたのでした。あの本は大変難解な本で、理解できない点が少なからずあるのですが、大変興味深い数々の結果がのっております。その一つに次のようなことが（其のまゝではないが）あります。いま $V^n$ を $n$ 次元の特異点のない複素代数多様体とし、その generic hyperplane section を $\overline{V}$ とします。そのとき

$$\psi_{\overline{V}} \quad H^0(V, \Omega^1_V) \longrightarrow H^0(\overline{V}, \Omega^1_{\overline{V}})$$

という自然な準同型が存在するのですが、これに関して次のことが成りたっています。

(1) $\psi_{\overline{V}}$ は単射である

(2) $n \geq 3$ なら $\psi_{\overline{V}}$ は全射である

(3) $n = 2$ のときには

$$H^0(\overline{V}, \Omega^1_{\overline{V}}) = \mathrm{Im}(\psi_{\overline{V}}) \oplus N$$

こゝで N は $(\omega) + \overline{V} > 0$ をみたす、第3種の2階微分 $\omega$ の $\overline{V}$ に関する Poincaré 剰余 $\mathrm{Res}\,\omega$ として得られる、$\overline{V}$ 上の第一種微分のつくる

加群を表わします．この3つの結果を一般標数の場合に，代数的に証明する，というのでその時私のたてた目標でありました．その後その目標をめざして，いろいろ第一種微分のことを研究したのでしたが，不十分な結果しか得られていないのは，お恥かしい次第であります．(1)に関連しまして，$\bar{V}$をVの部分多様体として，どのような$\bar{V}$に対して，$\varphi_{\bar{V}}$が単射になるかという形でいろいろしらべてみました．たとえば次のような場合には$\varphi_{\bar{V}}$は単射になります．

(i)．$\bar{V}$が十分次数の高い generic hypersurface section．

(ii) Vがアーベル多様体で，$\bar{V}$が余次元1の generating subvariety．

(iii) Vがアーベル多様体で，$\bar{V}^r$が generic r-section $(r \geq 1)$

(2)，(3)についても部分的な結果はありますが，満足のゆくものではありません．(3)に関連して一つ申し上げておきたいことがあり

ます. 次にあげますのは Castelnuovo の補題と呼ばれているもの(の一つ)であります.

補題 $F(X, Y, Z)$ を複素係数の既約な $m$ 次の同次式, $C$ を $F=0$ で定義される平面曲線で, その特異点は node だけであると仮定する. そのとき

$$A F'_X + B F'_Y + C F'_Z = 0$$

という自明でない関係式は, $A, B, C$ の次数が $m-1$ より小さい範囲では存在しない.
(Severi: Rend. r. Acad. Lincei, 7(1928), 1–14). この補題より何がいえるかというと $\mathrm{Im}(\psi_{\bar V}) \cap N = (0)$ が $n=2$ のときに成立することであります.
(3) なる命題は, $\psi_{\bar V}$ として $H^0(V^*, \Omega^{n-1}_{V^*}) \to H^0(\bar V, \Omega^{n-1}_{\bar V})$ としても意味があるわけですが, その場合に同様のことが証明できるためには, 次の一般化された補題があればよいわけです. すなわち $V^n$ を特異点をもたない代数多様体, $V^*$ を $S^{n+1}$ への $V$ の generic projection, $V^*$ の定義方程式を $F(X_0, X_1, \cdots, X_{n+1})$, その次数を $m$ とし, $A_i^*$ を次数が $m-n$ より小さい同次式で $\sum_{i=0}^{n+1} A_i^* F'_{X_i} = 0$

とすれば，$A_i^* = 0 \quad (0 \leq i \leq n+1)$ が成りたつ．このような $V^*$ は seminormal になるのですが，seminormal な超曲面 $V^*$ に対して，一般に上の結果が証明されれば大変有意義だと思はれます．

このようなことを卒業以来10年程やっておったのですが あまり進展もなく，またこのようなことに興味を示してくれる人もないようなので，徐々に方向を転換して，半一種微分を離れて，代数的に環の derivation（導分）や differential（微分）を扱う方の研究に進んでいったものです．その方面での最初の成果が数学会の Journal にでました On the theory of differentials in commutative rings. Vol. 13 (1961) であります．それにつゞいて，関連のある論文を何篇か書きましたが，そちらの方は比較的多くの人によんで貰っている様で，よく引用もしてもらっています．

これとは別に，他の系統の仕事が私にはあります．それについて一番大きいのは，

Zariskiさんの影響であります。Zariskiさんは昭和32年(1957)頃来日されて、京都大学に3ヶ月程滞在され、その間曲面の極小モデルについて講義をされました。それが、私が曲面論に接した始めてのことでした。その途中、Zariskiさんの示唆に従って、一般標数の場合に、幾何種数 $p_g$ が0の曲面上における固有一次系の完備性の証明にとりくみました。いろいろ苦心しましたが、その証明に成功したことは嬉しい思い出です。最終的には1つの補題に帰着させるのですが、それは次のようなものです。

補題 Vを特異点をもたない射影代数多様体、Eをその上のvery ampleな一次系で、Eに関するVのdual mapping $\varphi_E$ が至るところで1対1とする。$\mathfrak{M}_d$ として一次系 $|E|$ の元で、その特異点のorderが $\geq d$ なるものの集合とすると、$\mathfrak{M}_d$ は有限個の $|E|$ のalgebraic subsystemである。とくにBとして $\mathfrak{M}_d$ の既約成分で、Bのgeneric memberが孤立特異点しかもたないよ

うなものとすれば, $\dim B \geqq \dim|E| - d$ が成りたつ.

この補題自身の証明は他にもあって, 永田ー松村 秋月ー松村 氏らによる証明が公表されております

さて昭和34年(1959)に私は広島大学の方に転出いたしました. それまでは京都には沢山仲間がおりまして, 自分でよまなくても耳学問で新しい知識がはいってくる等, いろいろ好都合だったのですが, 広島では学問的には全く孤立してしまったわけで, 何をやればよかろうかと, いろいろ悩みました。然し一面唯一人で之から開拓してゆければ, それこそ本当に自分の仕事だという自負もありました。先程一寸ふれた数学会の Journal にでました論文も広島に参ってから, やり始めた仕事ですが, もう一つの記念すべき論文 *Non-degenerate divisors in an algebraic surface* Hiroshima J. Vol. 24 (1960) を書きましたのも広島に移りましてからの仕事で

こうしてあげてみますと，順調に仕事ができていたようにみえますが，当時の感覚としては決して余裕があったわけではありませんでした。

non-degenerate divisor というのは森川さんの命名でありまして，その後Weilさんがアーベル多様体の射影空間への「はめこみ」の問題を扱った論文の中で，その概念を取りあげ，そのような因子は，いまの用語を使えば，ample であることを証明したのであります．森川さんの定義はアーベル多様体でなければ使えませんが，何倍かすれば projective embedding を与えるという概念なら，一般の多様体にも適用できるわけですから，そのような因子に対して森川さんの用語を借用して non-degenerate divisor とよんだわけです．いまは ample とよびますが。因に當時の "ample" は現在の "very ample" に相当するので，このような用語が必要になったわけです。問題は ample な divisor とそうでない divisor とをどうすれば，効率よく判定でき

るかと考えたわけです 必要条件，すなわち「$X$ が ample な因子であれば $(X^2)>0$ でかつ，$(X\cdot\Gamma)>0$ がどんな曲線 $\Gamma$ に対しても成りたつこと」は容易にみえますが，それがまた十分条件であるとは，当初は考えていなくて，とにかくこれだけから，どのくらいのことがでるだろうかとやっているうちに，結論がでてしまったわけで，全く幸運であったと思っています．

1961年秋に Zariski さんのお招きをうけて，Harvard 大学にゆくことになったのですが大変よい時期に，良い機会を与えてもらったものだと感謝しています．本当はもう少し早くゆきたいと思っていたのでしたが，なかなか機会が来なくて，じりじりしていた矢先のことでした．運よく Fulbright の旅費の援助がうけられることになり，アンカレッジを経てシャトルまでは団体行動で，それから皆と別れ，同じように Harvard 大学に留学する2，3の人と，ボストンまでの長い汽車の旅を続けたものです．ボストンの South Station には，松阪

さんや、広中君が迎へに来て下さり、早々に下宿も探してもらい、幸先よいスタートをきつたものでした。生活のめどがたつてから、早速Zariskiさんのところへ、挨拶にゆきましたが、最近の私の仕事のことなどきかれた上、これからどういうことをやるつもりかと尋ねられ、曲面上のnon-degenerate divisorの結果を、高次元の場合に一般化することを考えたいと答えておきました。別に成算があつたわけでもなく、ただ何かもっともなThemeを選ばねばと考えていたので、咄嗟の間にそんな返事がでてしまつたというのが本音です。

　その年Harvardとその周辺にはずいぶんいろいろな人がおりました。MumfordやArtinがInstructorとしていたかに記憶しています。Hartshorne, Schlessinger, Lipman等はまだGraduate Studentでbaby seminarと名付けて、自分達だけでHomology代数の勉強をしていた様でした。Visitorとしては、小平さんがプリンストンから、Grothendieckがパリから、招待されて滞在中でした。小平さんは

Deformationの話を、GrothendieckはE.G.Aの四章あたりのことを講義していたと思います。またM.I.T.には岩沢さんがおられ、Brandeis大学には松阪さん、高橋さん、広中君が活躍されていました。またColloquiumはHarvard, M.I.T., とBrandeisの3つの大学の合同Colloquiumがもたれ、会場もまわりもちで、あちらこちらといったものです。Zariski先生のセミナーでは、広中君が4次元の多様体のdesingularizationのことを話していましたが、途中でその方法が高次元の場合にも適用できることに気がついて、急遽n次元の場合にかき直すことになつて、途中で一旦休みになつたように思います。このような華やかな雰囲気の中で、Grothendieckの講義に出席したり、小平さんのDeformationのセミナーをきいたりしていました。また週末になるとボストン交響楽団をきゝにいつたり、美術館を訪れて絵や、彫刻に親しみ時を移す事。気楽な生活でした。何しろ講義をする義務はなく、会議もなく、雑用もなく、

時間はたっぷりあったわけですから，さぞよく勉強できた筈であると思われるのですが，それが，それ程でもなかったのは残念なことです．それでも ample divisor の criterion ができて何とか面目を保てたような次第です．

さてその ample divisor の criterion ですが，$X$ が ample であることを示すには，$m$ を十分大きな整数とすると

(1) $|mX|$ が固定成分をもたないこと，

(2) $|mX|$ がどの次元 $r$ $(0 \leq r < n-1)$ の fundamental subvariety も，もたないこと，

(3) $|mX|$ が birational map を与えること

の3つを証明すればよいわけです．その証明の基本になるのは次の exact sequence です．$X$ を divisor，$D$ を余次元1の部分多様体とすると

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(mX-D) \longrightarrow \mathcal{O}(mX) \longrightarrow \mathcal{O}_D(m\bar{X}) \longrightarrow 0$$

という形の exact sequence が得られます．ただしここで $\bar{X} = X \cdot D$．之より次のコホモロジー群の完全列

$$H^0(V, \mathcal{O}(mX)) \xrightarrow{\psi} H^0(D, \mathcal{O}_D(m\bar{X})) \to H^1(V, \mathcal{O}(mX-D)) \to H^1(V, \mathcal{O}(mX)) \to \cdots$$

が得られます。このとき，$m$を十分大にすれば $\psi$ が全射になることを証明するのがキーポイントであります。結果からいえば $m \gg 0$ なら $H^1(V, \mathcal{O}(mX-D))=\{0\}$ となるのですが，それが苦心を要するところでありました。いろいろ苦労しまして，漸く証明ができたものですから，早速Zariskiさんのところへ参りまして，証明の骨子をきいて貰いました。その結果それでよかろうとなって早速原稿にとりかかったわけです。きっちり証明を書いてゆくうち一ヶ所気がかりなところに出会いました。そこで，こんどはMumfordの部屋にまいりまして，もう一度証明をきいてもらうことにしたわけです。そのときたまたまArtinが来ていたのか，あるいはMumfordとArtinの2人が1つの研究室を共用していたのかは定かではありませんが，とにかく，2人を前にして証明をきいてもらいました。そうしましたらMumford

は即座に私の気がかりとしていた点を指摘してくれ、やっぱりそうかとがっかりしたことを覚えています。然し幸いにしてその点は修正可能で、証明のアイデアは十分役にたつことが判明しました。それは元の多様体を、non-singular とするから隙ができるので、Scheme とすればそのまゝでよい筈だと教えてくれました。折よく Grothendieck が滞在中でしたので彼に頼んで E.G.A を一部寄贈してもらい Scheme の勉強にとりかかった次第でした。あの論文には私にとっていろいろ不満足な点があるのですが、その1つは $V$ を projective scheme としていることです。あの当時の私の意識では、元の多様体が射影空間にはめこめるかどうかを判定するというよりは、与えられた因子の豊富さの判定の方に主眼があったわけですから。さき程の $H^1(mX-D)=\{0\}$ の証明に、補助的な層として hyperplane section の層を使用したわけです。後に Kleiman が私の方法を改良して、$V$ を特異点のない抽象多様体として、Scheme 理論を

使わずに、あの criterion を証明いたしました。もう少し柔軟な思考をしていれば私でもできたのではないかと いまでも残念に思っています。どうもねばりが不足しているようです。

Harvard には丁度1年滞在しまして、翌1962年秋に帰国いたしました。もしその気があれば滞在を延長することもできたのです。が、家庭の事情で帰ることにしたのですが いささか心残りなことでした。帰国しましてからのことをふり返ってみますと、幾何学の方から離れて、代数の方に主力が注がれていることに気がつきます。何故もう少し criterion の延長上の仕事をしなかったのだろうかと、いまになって惜しいと思います。全然やらなかったわけではなく、2,3の結果は出したのですが、誰かに先をこされていたため、発表をしなかったこともありましたが。それにあの頃は、そろそろ Category や Scheme を使っての論文が盛んになりだしたころで、そのよう

な困難についてゆけなかったという面もありました それで勢い仕事の方は代数的な面に力を注ぐことになったわけです その中で比較的意義があると思われるのは High order derivation に関する仕事でなかろうかと思います 標数 $p(>0)$ の代数系 $R$ における derivation には重大な欠陥があるわけです というのは1つの導分の定数環が、必ず $R^p$ を含んでいるというわけです 従って導分を使って明らかにできるのは $R^p$-代数としての $R$ の構造だけで、それより深いところは derivation ではお手あげになります 従って $R^p$ で必ずしも $0$ にならない derivation に代るべき作用素がほしいわけです それについては、いろいろ工夫されていて、Hasse-Schmidt の higher derivation や、Dieudonne の semi-derivation があるわけですが、Osborn が提唱した high order derivation が一番一般なものでなかろうかと思います ただ Osborn は微分幾何の方を専攻する人で、標数 $p(>0)$ のことを考えていたわけでなく、またその扱いも

代数的観点からみれば不十分なものであったものですから，いわばその代数的基礎固めを試み，併せてその応用についての考察をしましたのが High order derivation I, II であります　II については 石橋，小崎両君に手伝って頂きました．これについては，まだまだ考えるべき問題は沢山あるのですが　ただ derivation の場合と異なり　非常に計算が複雑で見通しがわるいため，十分な展開はされていないという実状です　high order が扱いにくい1つの理由として，derivation の場合と異なり，D が subring A で 0 になるからといって，A-linear とはいえない点にあります

ここ数年私が興味をもってやっておりますのは locally finite iterative higher derivation，あるいは locally nilpotent derivation とその応用であります．たとえば，代数的閉体 k 上のアファイン環 A が多項式環になるための十分条件を locally finite iterative higher derivation の言葉で表現することであります　すなわち

(1) $A^* = k^*$

(2) $A$ は UFD

(3) $\dim A = 2$

(4) $A$ は $k$ 上の locally finite iterative higher derivation をもつ

という4つの条件を$A$が充せば $A$ は $k[x, y]$ と同型であるというのです この結果は、はじめ宮西君が取り上げ、彼自身による幾何学的な証明が与えられてあります

$\dim A = 1$ のときは(4)だけで、$A \cong k[x]$ が結論できるのに、2次元になると、UFD とか単元に関する条件が~~仮定が~~不可欠のようです それでは $\dim A \geq 3$ のときには、どのようなことになるのか 全く見当もつきません。また これは Keller の問題（~~通常~~ Jacobian problem とよぶ人も多いようですが）にも関係があります すなわち $f(x, y)$, $g(x, y)$ を複素係数の2変数多項式とし、$\partial(f, g)/\partial(x, y) = c$ が $0$ でない定数とすれば、$\mathbb{C}[x, y] = \mathbb{C}[f, g]$ となるというものです これの完全な解決は未だ与えられ

てはいませんが　もし

$$D=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}$$

が、$\mathbb{C}[x,y]$ の導分として、locally nilpotent であることがいえればよいことは、容易に知られます。然しこういう方向から、Keller の問題を攻めるのは、大変難かしいように思はれますが皆さんに良い工夫はありませんでしょうか。

新ねも大分多くなったようです。このあたりで筆をおきたいと思います。